B-IV/ MOUVEMENTS RECTILIGNES
الحــركــات الـمـسـتـقـيـمـة

1/ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME (الحركة المستقيمة المنتظمة)

- **Définition : Un point matériel est en mouvement rectiligne niforme si sa trajectoire est une droite et son vecteur vitesse constant (donc son vecteur accélération nul).**
- **Equation horaire :** on choisit l'axe OX comme repère rectiligne et on fixe la condition initiale $t=0$; $x=x_0$ (abscisse initiale).

Partant de la définition ci-dessus, et grâce à une intégration on arrive à exprimer l'abscisse x en fonction du temps :

$$v=\dot{x}=\frac{dx}{dt}=v_0 \Rightarrow dx=v_0.dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx=\int_{t_0}^{t} v_0.dt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x}=v_0 t\Big|_0^t \quad \Rightarrow x\text{-}x_0=v_0 t$$

Dans une dernière étape on obtient l'équation horaire du mouvement rectiligne qui est une fonction du temps de premier degré:

$$\boxed{x=v_0.t+x_0} \qquad \textbf{(4.13)}$$

On appelle x l'abscisse instantanée, et x_0 l'abscisse initiale.

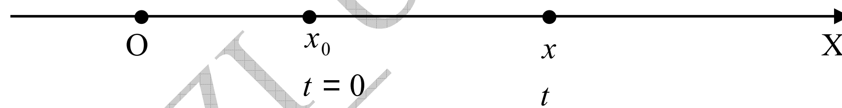


Fig 4.6 repère rectiligne

- **Diagrammes du mouvement(مخططات الحركة)**

Les diagrammes du mouvement rectiligne uniforme sont la représentation graphique de l'accélération, de la vitesse et du déplacement en fonction du temps. (Figure 4.7)

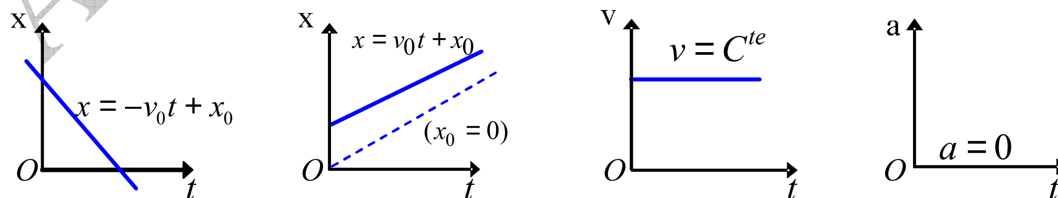


Fig 4.7 : Diagrammes du mouvement

Exemple 4.4 : Les équations horaires du mouvement d'un point matériel sont $x=2t$; $y=2t+4$; $z=0$ (toutes les unités sont dans le système international). Montrer que le mouvement est rectiligne et uniforme.

Remarque : Dans un repère cartésien, si l'une des coordonnées est nulle le mouvement est dit plan (mais il peut être rectiligne aussi) ; si deux coordonnées sont nulles le mouvement ne peut être que rectiligne ; si les trois coordonnées sont différents de zéro, dans ce cas le mouvement est dit spatial.

Réponse : Démontrons d'abord que le mouvement est rectiligne ; pour cela on doit chercher l'équation de la trajectoire. Après élimination du temps entre les deux équations horaires données on trouve : $y = x + 4 \Rightarrow$ équation d'une droite, donc le mouvement est rectiligne.

Pour que ce mouvement soit uniforme il faut que la vitesse soit constante en direction, en sens et en module.

Le vecteur vitesse est $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + 2^2} \Rightarrow v = \sqrt{8} = 2.83 ms^{-1}$

Ceci implique que le mouvement est uniforme. En définitif le mouvement est rectiligne et uniforme.

2/ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE

(الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام)

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante.
- **La vitesse algébrique** : En considérant les conditions initiales $t = 0$; $v = v_0$ (vitesse initiale), et partant des définitions précédentes, et en intégrant on peut écrire :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} adt \Rightarrow v\Big|_{v_0}^{v} = at\Big|_{0}^{t}$$

On obtient à la fin l'équation de la vitesse instantanée qui est une fonction du temps de premier degré:

$$\boxed{v = v_0 .t + v_0} \qquad \textbf{(14.4)}$$

- **Equation horaire du mouvement :** Si on prend $t = 0$; $x = x_0$ (abscisse initiale), et partant de ce qui précède on écrit :

$$v = \frac{dx}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx = (at + v_0)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (at + v_0)dt$$

L'équation horaire est donc :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0} \qquad \textbf{(15.4)}$$

- **Diagrammes du mouvement :** On voit sur la figure 4.8 les diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié relatifs à l'accélération, la vitesse et le déplacement.

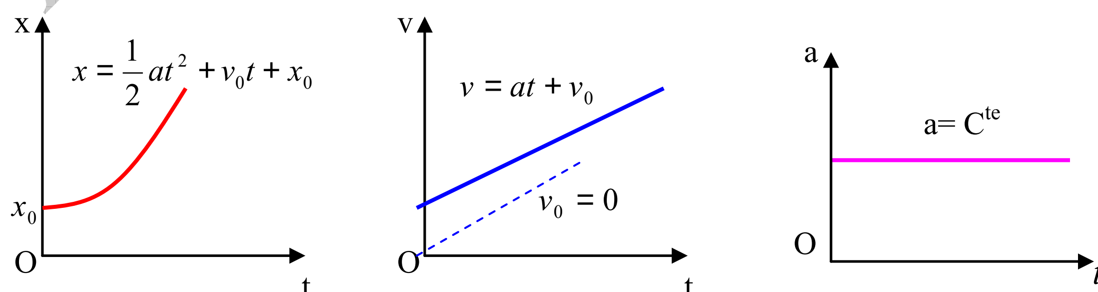


Fig 4.8 : Diagrammes du mouvement

Laissons à l'étudiant le soin de démontrer à titre d'exercice que : $v^2 - v_0^{\ 2} = 2a(x - x_0)$

Rappel : Le mouvement rectiligne est accéléré (متسارعة) si $\vec{a}.\vec{v} > \vec{0}$, et il est retardé (متباطئة) si $\vec{a}.\vec{v} < \vec{0}$

Exemple 4.5 : Un corps ponctuel se déplace suivant l'axe OX avec une vitesse d'équation : $v = 2t - 6 \quad (ms^{-1}) \ ; \ t \geq 0$.

a/ En déduire l'équation de l'accélération ainsi que l'équation horaire de ce mouvement sachant qu'à l'instant $t = 0$, $x = 5\text{m}$. Quelle est la nature du mouvement ?

b/ Indiquer les étapes (accélérée et retardée) du mouvement.

Réponse : On obtient l'équation de l'accélération en dérivant l'expression de la vitesse par rapport au temps : $a = \dfrac{dv}{dt} = 2ms^{-2}$. L'accélération est constante.

En intégrant l'expression de la vitesse on obtient l'équation horaire :

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t vdt \Rightarrow x = x_0 + \int_0^t (2t-6)$$

$$x = x_0 + t^2 - 6t \ ; \ t = 0 \ , \ x = 5 \Rightarrow x_0 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{x = t^2 - 6t + 5}$$

Le mouvement est rectiligne uniformément varié

b/ Les phases du mouvement : on dresse le tableau de variation suivant :

t	0	1	3	5	∞
v		-	0	+	
a		+		+	
x	↘	0	-4	0	↗
av		-	0	+	
		Mouvement retardé	*	Mouvement accéléré	

Tableau de variation 4.1

2/ MOUVEMENT RECTILIGNE A ACCELERATION VARIABLE

(الحركة المستقيمة متغيرة التسارع)

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est dit rectiligne à accélération variable si sa trajectoire est une droite et que son accélération est fonction du temps ($a = f(t)$).

Exemple 4.6 : Un corps ponctuel se déplace suivant une droite avec l'accélération $a = 4 - t^2$ (toutes les unités sont dans le système international MKS).

Trouver les expressions de la vitesse et du déplacement en fonction du temps en considérant les conditions suivantes : $t = 3s \ ; \ v = 2ms^{-1} \ ; x = 9m$

Réponse : Pour obtenir l'expression littérale de la vitesse on doit intégrer l'équation de l'accélération :

$$v = \int_0^t adt + v_0 \Rightarrow v = v_0 + \int_0^t (4 - t^2)dt \quad v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0$$

Intégrant de nouveau afin d'obtenir l'expression littérale du déplacement :

$$x = x_0 + \int_0^t v dt \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - v_0 t + x_0$$

Il nous reste à déterminer l'abscisse et la vitesse initiales du corps. D'après les données, on remplace dans les expressions obtenues précédemment le temps par $t = 3s$ pour trouver l'abscisse et la vitesse initiales :

$$t = 3s \Rightarrow x_0 = \frac{3}{4}m \quad ; \quad v_0 = -1ms^{-1}$$

En fin de compte, les expressions de la vitesse et du déplacement sont:

$$\boxed{x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}} \qquad \boxed{v = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1}$$

3/ MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL (الحركة المستقيمة الجيبية)

- **Définition :** Le mouvement d'un point matériel est rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{x = X_m.\cos(\omega.t + \varphi)} \qquad \textbf{(16.4)}$$

Ou même $x = X_m.\sin(\omega.t + \alpha)$

X_m : Amplitude ou élongation maximale **(السعة أو المطال الأعظمي)**, son unité est le mètre.

x : Élongation ou abscisse instantanée **(الفاصلة أو المطال اللحظي)**, elle varie entre deux valeurs extrêmes : $-1 \leq \cos(\omega t + \varphi) \leq +1 \Rightarrow -X_m \leq x \leq +X_m$, son unité est le mètre.

ω : Pulsation du mouvement **(نبض الحركة)**, son unité est le **radian/seconde.**

φ : Phase initiale **(الطور الإبتدائي أو الصفحة الإبتدائية)**, son unité est le **radian.**

$\omega t + \varphi$: Phase instantanée **(الطور اللحظي أو الصفحة اللحظية)**, son unité est le **radian.**

- **La vitesse :** En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée : $v = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$

$$\boxed{v = -X_m.\omega \sin(\omega t + \varphi)} \qquad \textbf{(17.4)}$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$-1 \leq \sin(\omega t + \varphi) \leq +1 \Rightarrow -X_m.\omega \leq v \leq +X_m.\omega$$

- **L'accélération :** En dérivant l'équation de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée :

$$a = \ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{a = -X_m \omega^2 \cos(\omega.t + \varphi)} \qquad \textbf{(18.4)}$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$+X_m \omega^2 \geq a \geq -X_m \omega^2$$

Nous pouvons écrire l'expression de l'accélération sous la forme :

$$\boxed{a = -\omega^2.x} \qquad \textbf{(19.4)}$$

L'accélération est proportionnelle à l'élongation avec un signe opposé.

Contrairement à la vitesse, l'accélération s'annule au passage du mobile par la position d'équilibre (origine des abscisses), et prend une valeur maximale lorsque l'élongation est maximale. Nous avons résumé sur la figure 4.9 les principales caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal.

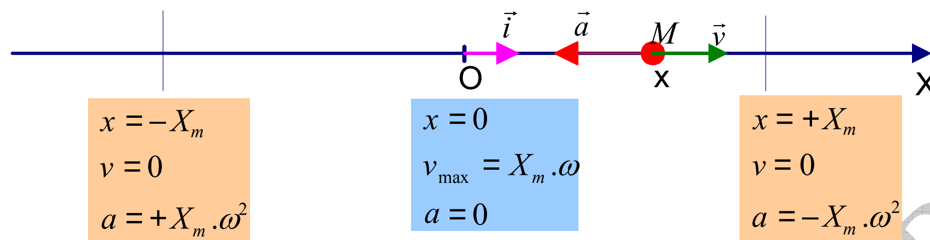


Fig 4.9

- **Equation différentielle du mouvement (المعادلة التفاضلية للحركة) :**
  L'équation de l'accélération peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.x = 0} \qquad \textbf{(20.4)}$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2.x = 0$$

La solution mathématique de cette équation différentielle est de la forme :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Après transformation trigonométrique nous pouvons écrire : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

X_m et φ sont les constantes différentielles qui sont déterminées grâce aux conditions initiales sur l'élongation x_0 et la vitesse v_0 ; d'où l'on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui nous permet de déterminer X_m et φ.

$$t = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x_0 = X_m \cos\varphi \\ v_0 = -X_m \sin\varphi \end{array} \right.$$

- **Les diagrammes du mouvement :** La figure 4.10 représente les diagrammes du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal (pour simplifier nous avons choisi $\varphi = 0$).

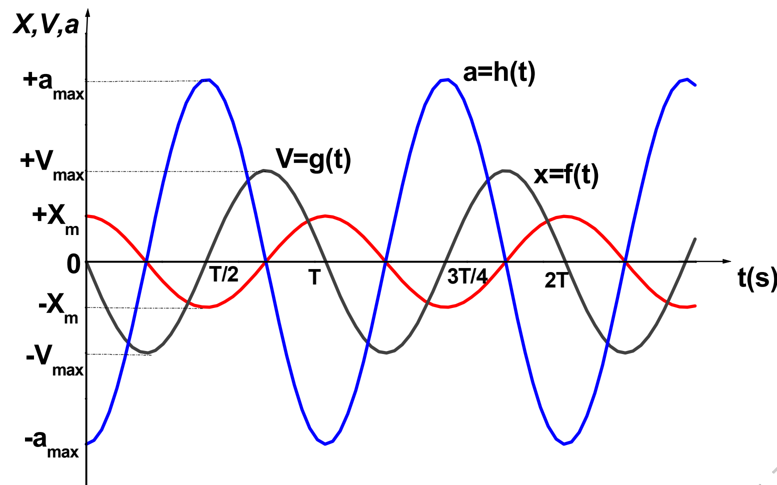


Fig 4.10 : Diagramme du mouvement

Exemple 4.7 : Un vibreur sinusoïdal représenté par l'équation $x = 4\sin(0.1t + 0.5)$ (toutes les unités sont dans le système international MKS).

Trouver :

a/ l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement,

b/ la vitesse et l'accélération,

c/ les conditions initiales,

d/ la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$,

e/ Dessiner les diagrammes du mouvement.

Réponse : Procédons par identification de l'équation horaire générale du mouvement rectiligne sinusoïdal et l'équation donnée dans l'énoncé de cet exercice.

$$x = 4\sin(0.1t + 0.5) = X_m \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

a/ L'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement.

$$\boxed{X_m = 4m}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 20\pi = 62.8s}$$

$$N = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{N = 1.59.10^{-2}\,Hz};\qquad \boxed{\varphi = 0.5rad}$$

b/ Calcul de la vitesse et de l'accélération :

$$\boxed{v = \dot{x} = 0.4\cos(0.1t + 0.5)}$$

$$a = \dot{v} = -0.04\sin(0.1t + 0.5) = -0.04x \qquad \boxed{a = -0.04x}$$

c/ Détermination des conditions initiales :

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = 4\sin 0.5 = 1.92m \;\Rightarrow \boxed{x_0 = 1.92m}$$

$$v_0 = 0.4\cos 0.5 \approx 0.35ms^{-1} \;\Rightarrow \boxed{v_0 = 0.35m}$$

d/ Désignation de la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$:

$$t = 5s: \quad x = 4sin(0.5 + 0.5) \quad \Rightarrow \boxed{x = 3.36m}$$

$$v = 0.4cos1 \Rightarrow \boxed{v = 0.22ms^{-1}}$$

$$a = -0.04sin1 \Rightarrow \boxed{a = 0.034ms^{-2}}$$

e/ Diagramme du mouvement : **Nous conseillons à l'étudiant de tracer lui-même ces diagrammes et de ne pas se contenter de jeter un simple coup d'œil sur la figure 4.11.**

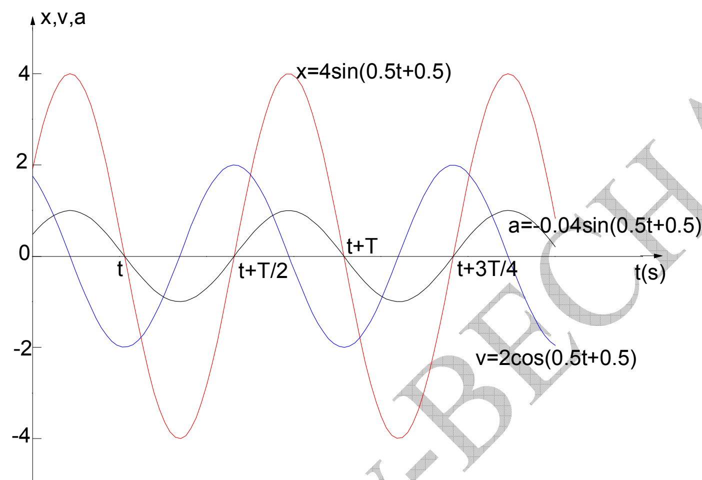


Fig 4.11 : Diagrammes du mouvement